

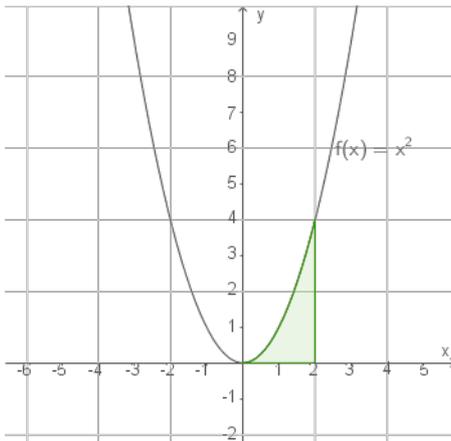
Flächeninhalt zwischen Graph und Achse

Spickzettel Aufgaben Lösungen **PLUS** Lernvideos

Den Inhalt einer Fläche zwischen einem Graphen und der x -Achse kannst du mit Hilfe von Integralen berechnen.

Beispiel

Das Integral $\int_0^2 (x^2) dx$ beschreibt den Inhalt der Fläche, die von dem Graphen zu $f(x) = x^2$ im Bereich $x = 0$ bis $x = 2$ eingeschlossen wird. Im folgenden Bild ist die Fläche grau markiert.



Vorgehen

Sollst du den Inhalt einer Fläche zwischen einem Graphen und der x -Achse bestimmen, so gibt es zwei mögliche Aufgabentypen:

Hast du die Grenzen des Bereichs, also a und b , gegeben, so gehe wie folgt vor:

1. Überprüfe, ob zwischen den beiden Grenzen a und b eine oder sogar mehrere Nullstellen von f liegen.
2.
 1. Gibt es keine Nullstellen im angegebenen Intervall, so berechne das Integral über $f(x)$ in den Grenzen a und b . Nimm am besten immer den Betrag des Integrals. Denn wenn die Fläche unterhalb der x -Achse liegt, hat das Integral ein negatives Vorzeichen, Flächeninhalte sind aber immer positiv.
 2. Gibt es Nullstellen, so musst du mehrere Integrale über f berechnen: Das Integral von der unteren Grenze a bis zur ersten Nullstelle, das Integral von der ersten Nullstelle bis zur zweiten Nullstelle, ... , das Integral von der letzten Nullstelle bis zur oberen Grenze b . Zum Schluss musst du die Beträge addieren.

Hast du keine Grenzen gegeben, so gibt es meist nur eine Fläche, die vollständig von dem Graphen von f und der x -Achse eingeschlossen wird. Gehe dann wie folgt vor:

1. Bestimme die Nullstellen von f . In solchen Fällen gibt es meist genau zwei.
2. Berechne das Integral über f mit den Nullstellen als Grenzen. Gibt es doch mehr als zwei Nullstellen, so musst du auch hier von Nullstelle zu Nullstelle integrieren und alle Beträge addieren.

Beispiel 1

Berechne den Inhalt der Fläche, den die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 9$ mit der x -Achse einschließt.

Da hier die Grenzen nicht gegeben sind, müssen wir die Nullstellen berechnen. Diese ergeben sich mit $a = -3$, $b = 3$. Berechne also den Betrag des Integrals über f mit den Nullstellen als Grenzen:

$$A_f = \left| \int_{-3}^3 (-x^2 + 9) dx \right| = 36$$

Beispiel 2

Berechne den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f mit $f(x) = x^3 - 9x$ und der x -Achse im

Bereich $a = -3$ bis $b = 3$.

Die Nullstellen sind hier $a = -3$, $x_0 = 0$ und $b = 3$. Hier musst du also zwei Integrale berechnen:

$$A = \left| \int_{-3}^0 (x^3 - 9x) \, dx \right| + \left| \int_0^3 (x^3 - 9x) \, dx \right| = |20,25| + |-20,25| = 40,5 \text{ (FE)}$$

Auf dem folgenden Bild sind die beiden Teilflächen dargestellt:

